

0-787733

На правах рукописи



Матвиенко Иван Викторович

**Римановы метрики
положительной кривизны Риччи
на многообразиях с торическими
действиями**

01.01.04 — геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск — 2011

**Работа выполнена на кафедре геометрии и топологии
Новосибирского государственного университета**

Научный руководитель: д. ф.-м. н.
Базайкин Ярослав Владимирович

Официальные оппоненты: д. ф.-м. н., профессор
Медных Александр Дмитриевич,
д. ф.-м. н., профессор
Панов Тарас Евгеньевич

Ведущая организация: Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Защита состоится «12» мая 2011 года в 16:00 на заседании
диссертационного совета Д 003.015.03 при Институте математики
им. С. Л. Соболева СО РАН по адресу: 630090, г. Новосибирск, пр. Ака-
демика Колтюга, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института матема-
тики им. С. Л. Соболева СО РАН.

Автореферат разослан «12» апреля 2011 года.

НАУЧНАЯ БИБЛИОТЕКА КГУ



0000666057

**Ученый секретарь
диссертационного совета**

Гутман А. Е.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы.

Одной из важных и интересных проблем римановой геометрии является задача о связи свойств кривизны и топологического строения риманова многообразия. Ставший классическим вопрос о топологии римановых многообразий положительной секционной кривизны, как показывает опыт, является весьма сложным; гораздо более слабое свойство положительной скалярной кривизны практически не доставляет геометрических ограничений. Промежуточный вопрос о многообразиях положительной кривизны Риччи представляется в этом свете весьма правильно поставленным: с одной стороны, это свойство значительно слабее свойства положительности секционной кривизны, и известны серии примеров; с другой стороны примеров не так уж много и задача представляется нетривиальной.

Классическими примерами многообразий положительной кривизны Риччи являются нормально однородные пространства с конечной фундаментальной группой и их римановы произведения, например S^n , CP^n , $S^n \times S^m$.

Более сложные топологические типы впервые были сконструированы Дж. Ша и Д. Янгом [10] в 1991 г. Они построили метрику положительной кривизны Риччи на связных суммах любого числа $S^n \times S^m$ при фиксированных n, m :

$$\# k S^n \times S^m \quad \forall k \geq 1 \quad \forall n, m \geq 2.$$

Этот результат показал неограниченность чисел Бетти многообразий положительной кривизны Риччи при фиксированной размерности (что находится в контрасте с положительной секционной кривизной).

Подход Дж. Ша и Д. Янга оказался продуктивным. Д. Рейт [12] в 2007 г. обобщил их результат для связных сумм произвольных $S^{n_i} \times S^{m_i}$:

$$\#_{i=1}^k S^{n_i} \times S^{m_i} \quad \forall k \geq 1 \quad \forall n_i, m_i \geq 2, \quad n_i + m_i = \text{const.}$$

В основе обеих работ лежит метод хирургии с сохранением положительности кривизны Риччи.

На связных суммах двух комплексных проективных пространств:

$$CP^n \# \pm CP^n$$

известна метрика Чигера [4] неотрицательной секционной кривизны, для которой, как очевидно, кривизна Риччи является положительной.

Метрики положительной кривизны Риччи на связных суммах произвольного числа комплексных проективных пространств известны лишь в размерности четыре. Дж. Ша и Д. Янг [11] в 1993 г. показали, что связные суммы $\mathbb{C}P^2$ и $\overline{\mathbb{C}P}^2$:

$$k\mathbb{C}P^2 \# l\overline{\mathbb{C}P}^2 \quad \forall k, l \geq 0$$

обладают метриками положительной кривизны Риччи. Чуть позже, в 1997 г. Г. Перельман [9] частично повторил этот результат, построив метрики на связной сумме одинаково ориентированных проективных пространств:

$$\# k\mathbb{C}P^2 \quad \forall k \geq 1.$$

Все вышеупомянутые примеры в четной размерности $2n$ допускают действие компактного тора $T^n = S^1 \times \dots \times S^1$. В связи с этим возникает вопрос о существовании метрик положительной кривизны Риччи в более общих классах многообразий с действием T^n .

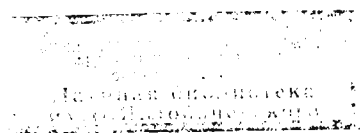
Основное внимание в работе уделяется в квазиторическим и момент-угол многообразиям. Эти два класса многообразий впервые были введены М. Дэвисом и Т. Янушкиевичем в [5] в 1991 г. Их топология тесно связана с комбинаторикой выпуклых многогранников. До сих пор они изучались в основном с точки зрения алгебраической топологии. В этом свете изучение свойств кривизны квазиторических и момент-угол многообразий представляет весьма интересным.

Цель работы.

Целью настоящей работы состоит в построении новых примеров римановых многообразий положительной кривизны Риччи. А именно, в основную задачу работы входит поиск римановых метрик положительной кривизны Риччи на некоторых квазиторических и момент-угол многообразиях.

Объект исследований.

Объектом исследований настоящей диссертации являются квазиторические и момент-угол многообразия, снабженные римановыми метриками. Топология этих пространств тесно связана с комбинаторикой выпуклых полиэдров. Оба класса многообразий допускают действие компактного тора T^n , факторпространство по которому является простым многогранником.



Методы исследований.

Получение основных результатов опирается на методы дифференциальной и алгебраической геометрии, в частности, теории римановых субмерсий, теории раздутий орбифолдных особенностей и теории торических многообразий.

Научная новизна.

Результаты диссертации являются новыми и заключаются в следующем:

1. На каждом односвязном четырехмерном T^2 -многообразии построена риманова метрика положительной кривизны Риччи, относительно которой тор T^2 действует изометриями.
2. Построены римановы метрики положительной кривизны Риччи на некоторых момент-угол многообразиях, отвечающих многогранникам, которые получаются из трёхмерного куба срезанием непесекающихся наборов вершин и рёбер. В частности, построен пример неформального момент-угол многообразия положительной кривизны Риччи.

Отметим, что односвязные четырехмерные T^2 -многообразия в точности являются четырехмерными квазиточескими многообразиями.

Теоретическая и практическая ценность.

Результаты диссертации носят теоретический характер и могут быть использованы специалистами по дифференциальной геометрии и интересны специалистам, занимающимся положительной кривизной Риччи, квазиторическими и момент-угол многообразиями.

Апробация работы.

Результаты диссертации докладывались на международных и российских конференциях:

- «Современные проблемы анализа и геометрии» (Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, сентябрь 2009),
- «Топоноговские чтения» (Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, март 2010).

Кроме того, результаты докладывались на следующих семинарах:

- «Геометрия, топология и математическая физика» под руководством С. П. Новикова, В. М. Бухштабера (Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова),
- «Геометрия, топология и их приложения» под руководством И. А. Тайманова (Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН),
- «Риманова геометрия» под руководством И. А. Тайманова, Я. В. Базайкина (Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН),
- «Интегрируемые системы» под руководством А. Е. Миронова (Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН).

Публикации.

Результаты диссертации изложены в трёх работах автора [13, 14, 15], которые приведены в конце автореферата.

Структура и объём работы.

Диссертация состоит из введения, трёх глав и списка литературы, включающего 25 наименований. Общий объём диссертации составляет 59 страниц.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении описываются основные результаты и даётся краткий обзор исследований по теме диссертации.

Первая глава содержит определения и понятия, необходимые в дальнейшем. Значительное внимание уделяется квазиторическим и момент-угол многообразиям, их взаимосвязи и базовым фактам о геометрии пространств. Кроме того, вводятся квазиторические орбифолды как многообразия с особенностями, которые появляются в качестве естественного обобщения для квазиторических многообразий. В конце главы приведены некоторые факты римановой геометрии и элементы теории римановых субмерсий, в частности приведены формулы О'Нила для кривизны, которые используются в дальнейшем как инструмент при построении метрик положительной кривизны Риччи.

Введём определение квазиторического многообразия. Для этого нам потребуется ряд вспомогательных понятий.

Представление тора T^n диагональными матрицами из $U(n)$ мы будем называть стандартным действием на \mathbb{C}^n . Пространством орбит стандартного действия является положительный конус \mathbb{R}_+^n . Каноническая проекция

$$\mathbb{R}_+^n \times T^n \rightarrow \mathbb{C}^n : (x_1, \dots, x_n) \times (t_1, \dots, t_n) \mapsto (x_1 t_1, \dots, x_n t_n)$$

отождествляет \mathbb{C}^n с факторпространством $(\mathbb{R}_+^n \times T^n)/\sim$. Это факторпространство служит «локальной моделью» для квазиторических многообразий.

Многообразие M размерности $2n$ с заданным действием n -мерного тора будем называть T^n -многообразием. Карту U для T^n -многообразия, инвариантную относительно действия тора, будем считать *стандартной*, если U эквивариантно гомеоморфно \mathbb{C}^n со стандартным действием тора. Скажем, что действие тора T^n на M является *локально стандартным*, если M допускает атлас из стандартных карт.

Многообразием с углами назовём гладкое многообразие с краем, которое локально моделируется открытыми подмножествами в положительном конусе \mathbb{R}_+^n . Простейшими примерами многообразий с углами являются простые многогранники. *Простым многогранником* является выпуклый n -мерный многогранник, который задаётся в \mathbb{R}^n системой неравенств

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + b_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m$$

«общего положения». Последнее означает, что в каждой вершине пересекается ровно n гиперграней.

Определение. Пусть P — простой многогранник размерности n . *Квазиторическим многообразием* над P называется $2n$ -мерное T^n -многообразие M , удовлетворяющее следующим двум условиям:

- а) действие тора является локально стандартным;
- б) пространство орбит диффеоморфно, как многообразие с углами, многограннику P .

Теперь введём определение момент-угол многообразий. Обозначим как и раньше через P простой многогранник размерности n . F_1, \dots, F_m

— его гиперграни. Для $q \in P$ обозначим через $G(q)$ наименьшую (по включению) грань, в которой содержится точка q . Рассмотрим $P \times T^m$, где T^m — стандартный m -мерный тор, в котором нумерация координат соответствует нумерации граней P . Обозначим через T^{F_i} окружность $S^1 \subset T^m$, отвечающую i -ой грани. Теперь для любой грани G многогранника P положим

$$T^G = \prod_{G \subset F_i} T^{F_i} \subset T^m.$$

Определение. Рассмотрим факторпространство

$$Z_P = (P \times T^m) / \sim,$$

где $(p, t_1) \sim (q, t_2)$ тогда и только тогда, когда $p = q$ и $t_1 t_2^{-1} \in T^{G(q)}$. На Z_P можно ввести структуру гладкого многообразия такую, что естественное действие T^m будет гладким [2, 3]. Многообразие Z_P (с некоторой T^m -инвариантной гладкостью) будем называть *момент-угол многообразием* для простого многогранника P .

Связь между квазиторическими и момент-угол многообразиями проявляется в следующем универсальном свойстве момент-угол многообразий, которое доказано в [5].

Пусть P — простой многогранник размерности n с m гипергранями. Если рассмотреть некоторый тор $T^{m-n} \subset T^m$, действие которого свободно на Z_P , то $M = Z_P / T^{m-n}$ будет являться квазиторическим многообразием. И наоборот, для любого квазиторического многообразия M над P существует тор $T^{m-n} \subset T^m$, свободно действующий на Z_P таким образом, что T^n -многообразие Z_P / T^{m-n} слабо эквивариантно гомеоморфно M . При этом возникает главное T^{m-n} -расслоение

$$\pi : Z_P \rightarrow M.$$

Приведённое утверждение играет важную роль в работе при построении римановых метрик на квазиторических и момент-угол многообразиях.

Вторая глава посвящена построению T^2 -инвариантных метрик положительной кривизны Риччи на четырёхмерных квазиторических многообразиях, которые в точности являются четырёхмерными односвязными T^2 -многообразиями с эффективным действием двумерного тора.

Ещё в 1970 г. П. Орлик и Ф. Раймонд [8] показали, что любое односвязное T^2 -многообразие гомеоморфно связной сумме конечного числа экземпляров $S^2 \times S^2$, CP^2 и \overline{CP}^2 . С учётом результатов Дж. Ша и Д. Янга [10, 11] любая такая сумма обладает римановой метрикой положительной кривизны Риччи. Но конструкция в [10] не позволяет строить T^2 -инвариантные метрики. Кроме того, до сих пор оставался не исследованным вопрос о том, существует ли риманова метрика положительной кривизны Риччи в каждом T^2 -эквивариантном классе односвязных четырехмерных T^2 -многообразий.

Основным результатом второй главы является следующая теорема:

Теорема. *На каждом односвязном четырехмерном T^2 -многообразии существует риманова метрика положительной кривизны Риччи, относительно которой тор T^2 действует изометриями.*

В доказательстве теоремы каждое четырехмерное квазиторическое многообразие M над двумерным многогранником P с t сторонами моделируется как факторпространство Z_P/T^{m-2} момент-угол многообразия Z_P по свободному действию тора $T^{m-2} \subset T^n$. Любая T^n -инвариантная метрика на Z_P при факторизации по T^{m-2} индуцирует T^2 -инвариантную метрику на M . При этом возникает риманова субмерсия $\pi : Z_P \rightarrow M$. Выбор подходящей метрики на Z_P и применение формул О'Нила для кривизны Риччи [1, 7] даёт искомую метрику на M .

Третья глава содержит результаты о метриках положительной кривизны Риччи на момент-угол многообразиях. Интерес к последним возникает не случайно. Например, момент-угол многообразие Z_P над любым двумерным многоугольником P обладает метрикой положительной кривизны Риччи. Действительно, Ф. Бозио и Л. Меерссеман [3] посчитали, что Z_P является связной суммой типа $\#_{i=1}^k S^{n_i} \times S^{m_i}$, для которой из результатов Д. Рейта [12] следует существование метрики положительной кривизны Риччи. В главе 3 строится серия более сложных примеров, которые получаются из трёхмерного куба.

Положим за $Q = [0, 1]^3$ трёхмерный куб. Рассмотрим всевозможные наборы непересекающихся вершин и рёбер. С точностью до изометрий куба их существует ровно 80. Обозначим вершины буквами $ABCD A'B'C'D'$ и рассмотрим совокупность \mathfrak{S} , состоящую из следующих 50 наборов:

- 1) A ; 2) A, B ; 3) A, C ; 4) A, C' ; 5) A, B', C ; 6) A, B, C, D ;

- 7) A, C, A', C' ; 8) $A, B, C, D, A', B', C', D'$; 9) AA' ; 10) AA', BB' ;
- 11) AA', CC' ; 12) AA', BC ; 13) AA', BB', CC' ; 14) AA', BB', CD ;
- 15) $AA', BC, C'D'$; 16) AA', BB', CC', DD' ; 17) $AA', BB', CD, C'D'$;
- 18) AA', B ; 19) AA', C ; 20) AA', B, B' ; 21) AA', C, C' ;
- 22) AA', B, C ; 23) AA', B, C' ; 24) AA', B, D ; 25) AA', B, D' ;
- 26) AA', B, C', D ; 27) AA', B, C, B', C' ; 28) AA', B, D, B', D' ;
- 29) AA', BB', C ; 30) AA', CC', B ; 31) AA', BC, D ;
- 32) AA', BC, D' ; 33) AA', BB', C, C' ; 34) AA', BB', C, D ;
- 35) AA', BB', C, D' ; 36) AA', CC', B, B' ; 37) AA', CC', B, D ;
- 38) AA', CC', B, D' ; 39) AA', BC, B', C' ; 40) AA', BC, B', D ;
- 41) AA', BC, C', D ; 42) AA', BC, C', D' ;
- 43) AA', BB', C, D, C', D' ; 44) AA', CC', B, D, B', D' ;
- 45) AA', BB', CC', D ; 46) AA', BB', CD, C' ;
- 47) $AA', BC, C'D', B'$; 48) AA', BB', CC', D, D' ;
- 49) AA', BB', CD, C', D' ; 50) $AA', BC, C'D', B', D$.

Главный результат третьей главы заключается в теореме:

Теорема. Пусть для каждого $S \in \mathfrak{S}$ многогранник P_S получается из куба Q срезанием плоскостями малых окрестностей вершин и рёбер из куба S . Тогда на момент-угол многообразии Z_{P_S} существует риманова метрика положительной кривизны Риччи.

Не все наборы из \mathfrak{S} представляют одинаковый интерес. В частности, момент-угол многообразия, отвечающие наборам 9, 10, 11, 13, 16 со срезанными параллельными рёбрами, являются прямыми произведениями. Действительно, соответствующие многоугольники являются произведением отрезка $I = [0, 1]$ на двумерный многоугольник P . Из определения момент-угол многообразия следует, что $Z_{I \times P} = Z_I \times Z_P = S^3 \times Z_P$. Как отмечалось выше, Z_P обладает требуемой метрикой. Отсюда с помощью риманово произведения получаем метрику положительной кривизны Риччи на $Z_{I \times P}$.

Более интересным является случай 1: куб со срезанной вершиной. В [6] исследована топология соответствующего момент-угол многообразия, в частности оно не может быть представлено в виде связной суммы произведений сфер. Другой интересный пример получается из набора 12: куб с двумя срезанными накрест лежащими рёбрами. В. М. Бухштабер и Т. Е. Панов [2] показали, что момент-угол многообразие, построенное по этой схеме, не является формальным, т. к. его когомологии содержат нетривиальные произведения Масси. Тем самым мы можем сформулировать следствие.

Следствие. *Существует неформальное момент-угол многообразие положительной кривизны Риччи.*

Напоследок в диссертации формулируются два открытых вопроса, которые кажутся вполне естественными.

Вопрос. *Существуют ли метрики положительной кривизны Риччи на всех момент-угол многообразиях?*

В качестве одной из предпосылок к утвердительному ответу (помимо результатов настоящей диссертации), указывается следующее: если P — двумерный многоугольник, либо если P получен из многомерного тетраэдра многократным применением операции срезания малой окрестности некоторой вершины, то, как показали Ф. Бозио и Л. Меерссеман [3], Z_P диффеоморфно определенной связной сумме произведений сфер различных размерностей, и положительный ответ на вопрос в этом случае дает работа Д. Рейта [12]. Второй вопрос представляется гораздо более сложным и неоднозначным.

Вопрос. *Существуют ли метрики положительной кривизны Риччи на всех квазиторических многообразиях?*

В качестве вероятного положительного ответа на этот вопрос указывается лишь, что в четырёхмерном случае, как следует из результатов диссертации, ответ утвердительный.

Благодарности.

Автор выражает глубокую благодарность Я. В. Базайкину за постановку задачи и поддержку в работе, Т. Е. Панову за полезные консультации, а также всему коллективу кафедры геометрии и топологии Новосибирского государственного университета за тёплую дружескую учебную атмосферу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Бессе А. Многообразия Эйнштейна. М.: Мир, 1990.
- [2] Бухштабер В. М., Панов Т. Е. Торические действия в топологии и комбинаторике. М.: МЦНМО, 2004.
- [3] Bosio F., Meersseman L. Real quadrics in \mathbb{C}^n , complex manifolds and convex polytopes // Acta Mathematica. 2006. V. 197, N 1. P. 53–127.
- [4] Cheeger J. Some examples of manifolds of nonnegative curvature // Journal of Differential Geometry. 1973. V. 8, N 4. P. 623–628.
- [5] Davis M. W., Januszkiewicz T. Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions // Duke Mathematical Journal. 1991. V. 62, N 2. P. 417–451.
- [6] Gitler S., Medrano S. L. Intersections of quadrics, moment-angle manifolds and connected sums // arXiv:0901.2580v2 [math.GT]
- [7] O'Neill B. The fundamental equations of a submersion // Mich Math. J. 1966. V. 13. P. 459–469.
- [8] Orlik P., Raymond F. Actions of the torus on 4-manifolds // I. TAMS. 1970. V. 152. P. 531–559.
- [9] Perelman G. Construction of Manifolds of Positive Ricci Curvature with Big Volume and Large Betti Numbers // Comparison Geom. MSRI. 1997. V. 30. P. 157–163.
- [10] Sha J., Yang D. Positive Ricci curvature on the connected sums of $S^n \times S^m$ // Journal of Differential Geometry. 1991. V. 33, N 1. P. 127–137.
- [11] Sha J., Yang D. Positive Ricci curvature on compact simply connected 4-manifolds // Differential geometry. Part 3: Riemannian geometry. Providence, RI: American Mathematical Society. Proc. Symp. Pure Math. 1993. V. 54, Part 3. P. 529–538.
- [12] Wraith D. J. New connected sums with positive Ricci curvature // Annals of Global Analysis and Geometry. 2007. V. 32, N 4. P. 343–360.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

- [13] Базайкин Я. В., Матвиенко И. В. О четырехмерных T^2 -многообразиях положительной кривизны Риччи // Сибирский математический журнал. 2007. Т. 48, № 5. С. 973–980.
- [14] Базайкин Я. В., Матвиенко И. В. О момент-угол многообразиях положительной кривизны Риччи // Сибирский математический журнал. 2011. Т. 52, № 1. С. 15–29.
- [15] Матвиенко И. В. Момент-угол многообразия положительной кривизны Риччи, отвечающие трёхмерному кубу // Успехи математических наук. 2011. Т. 66, № 2. С. 233–234.

В работах [13, 14] вклад авторов равноценный.

Автореферат диссертации:

Формат 60×84 1/16, 0,95 п. л. Тираж 100 экз.

Заказ № 863. 05.04. 2011

Отпечатано ЗАО РИЦ «Прайс-курьер» ул. Кутателадзе, 4г, т. 330-7202

10 =